**第三讲等比数列及其前*n*项和**

id:2147491657;FounderCES

题组1等比数列及其前*n*项和

1*.*[2015新课标全国Ⅱ,4,5分][理]已知等比数列{*an*}满足*a*1*=*3,*a*1*+a*3*+a*5*=*21,则*a*3*+a*5*+a*7*=*()

A.21 B.42 C.63 D.84

2*.*[2013新课标全国Ⅱ,3,5分][理]等比数列{*an*}的前*n*项和为*Sn.*已知*S*3*=a*2*+*10*a*1,*a*5*=*9,则*a*1*=*()

A. B.- C. D.-

3*.*[2017 江苏,9,5分][理]等比数列{*an*}的各项均为实数,其前*n*项和为*Sn.*已知*S*3*=*,*S*6*=*,则*a*8*=　　　　.*

4*.*[2015新课标全国*Ⅰ*,13,5分]在数列{*an*}中,*a*1*=*2,*an+*1*=*2*an*,*Sn*为{*an*}的前*n*项和*.*若*Sn=*126,则*n=　　　.*

5*.*[2013辽宁,14,5分][理]已知等比数列{*an*}是递增数列,*Sn*是{*an*}的前*n*项和*.*若*a*1,*a*3是方程*x*2*-*5*x+*4*=*0的两个根,则*S*6*=　　　.*

6*.*[2017 山东,19, 12分][理]已知{*xn*}是各项均为正数的等比数列,且*x*1*+x*2*=*3,*x*3*-x*2*=*2*.*

(Ⅰ)求数列{*xn*}的通项公式;

(Ⅱ)如图6*-*3*-*1,在平面直角坐标系*xOy*中,依次连接点*P*1(*x*1,1),*P*2(*x*2,2),…,*Pn+*1(*xn+*1,*n+*1)得到折线*P*1*P*2…*Pn+*1,求由该折线与直线*y=*0,*x=x*1,*x=xn+*1所围成的区域的面积*Tn.*

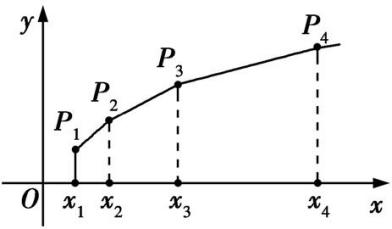


图6*-*3*-*1

7*.*[2016全国卷Ⅲ,17,12分][理]已知数列{*an*}的前*n*项和*Sn=*1*+λan*,其中*λ*≠0*.*

(Ⅰ)证明{*an*}是等比数列,并求其通项公式;

(Ⅱ)若*S*5*=*,求*λ.*

题组2等比数列的性质

8*.*[2014重庆,2,5分][理]对任意等比数列{*an*},下列说法一定正确的是()

A*.a*1,*a*3,*a*9成等比数列 B.*a*2,*a*3,*a*6成等比数列

C*.a*2,*a*4,*a*8成等比数列 D*.a*3,*a*6,*a*9成等比数列

9*.*[2014广东,13,5分][理]若等比数列{*an*}的各项均为正数,且*a*10*a*11*+a*9*a*12*=*2e5,则ln *a*1*+*ln *a*2*+*…*+*ln *a*20*=　　　　.*

10*.*[2016天津,18,13分]已知{*an*}是等比数列,前*n*项和为*Sn*(*n*∈N*\**),且*-=*,*S*6*=*63*.*

(Ⅰ)求{*an*}的通项公式;

(Ⅱ)若对任意的*n*∈N*\**,*bn*是log2*an*和log2*an+*1的等差中项,求数列{(*-*1)*n*}的前2*n*项和*.*

id:2147491685;FounderCES

**A组基础题**

1*.*[2018河北衡水中学二调,3]设正项等比数列{*an*}的前*n*项和为*Sn*,且*<*1,若*a*3*+a*5*=*20,*a*3*a*5*=*64,则*S*4*=*()

A*.*63或120 B*.*256 C*.*120 D*.*63

2*.*[2018益阳市、湘潭市高三调研,4]已知等比数列{*an*}中,*a*5*=*3,*a*4*a*7*=*45,则的值为()

A*.*3 B.5 C.9 D.25

3*.*[2018洛阳市尖子生高三第一次联考,7]在等比数列{*an*}中,*a*3,*a*15是方程*x*2*+*6*x+*2*=*0的根,则的值为()

A.- B.- C. D.-或

4*.*[2017吉林省部分学校高三仿真考试,7][数学文化题]《张丘建算经》中“今有马行转迟,次日减半,疾七日,行七百里*.*问日行几何?”意思是:“现有一匹马行走的速度逐渐变慢,每天走的里数是前一天的一半,连续行走7天,共走了700里路,问每天走的里数为多少?”则该匹马第一天走的里数为()

A. B. C. D.

5*.*[2018广州市高三调研测试,14]在各项都为正数的等比数列{*an*}中,若*a*2 018*=*,则*+*的最小值为*.*

6*.*[2018惠州市一调,15]已知等比数列{*an*}的公比为正数,且*a*3*a*9 *=* 2,*a*2 *=* 1,则*a*1 *=* *.*

7*.*[2017昆明市高三适应性检测,17]数列{*an*}满足*a*1*=-*1,*an+*1*+*2*an=*3*.*

(1)证明{*an-*1}是等比数列,并求数列{*an*}的通项公式;

(2)已知符号函数sgn(*x*)*=*设*bn=an*·sgn(*an*),求数列{*bn*}的前100项和*.*

**B组提升题**

8*.*[2018石家庄市重点高中摸底考试,9]已知等比数列{*an*}的前*n*项和为*Sn*,若*S*3*=*7,*S*6*=*63,则数列{*nan*}的前*n*项和为()

A*.-*3*+*(*n+*1)*×*2*n* B*.*3*+*(*n+*1)*×*2*n* C*.*1*+*(*n+*1)*×*2 *n* D*.*1*+*(*n-*1)*×*2*n*

9*.*[2017重庆市名校联盟二诊,10分]设*Tn*为等比数列{*an*}的前*n*项之积,且*a*1*=-*6,*a*4*=-*,则当*Tn*最大时,*n*的值为()

A.4 B.6 C.8 D.10

10*.*[2017天星第二次大联考,7]已知数列{*an*}的前*n*项和为*Sn*,若4*nSn-*(6*n-*3)*an=*3*n*,则下列说法正确的是()

A.数列{*an*}是以3为首项的等比数列

B.数列{*an*}的通项公式为*an=*

C.数列{}是等比数列,且公比为3

D.数列{}是等比数列,且公比为

11*.*[2017郑州市第三次质量预测,8]已知等比数列{*an*},且*a*6*+a*8*=*d*x*,则*a*8(*a*4*+*2*a*6*+a*8)的值为()

A.π2  B.4π2 C.8π2 D.16π2

12*.*[2017太原市高三三模,9]已知数列{*an*}的前*n*项和为*Sn*,点(*n*,*Sn+*3)(*n*∈N*\**)在函数*y=*3*×*2*x*的图象上,等比数列{*bn*}满足*bn+bn+*1*=an*(*n*∈N*\**),其前*n*项和为*Tn*,则下列结论正确的是()

A.*Sn=*2*Tn* B.*Tn=*2*bn+*1

C.*Tn>an* D.*Tn<bn+*1

13*.*[2018河北省“五个一名校联盟”高三第二次考试,17]已知数列{*an*}是等差数列,*a*2*=*6,前*n*项和为*Sn*,数列{*bn*}是等比数列,*b*2*=*2,*a*1*b*3*=*12,*S*3*+b*1*=*19*.*

(1)求{*an*},{*bn*}的通项公式;

(2)求数列{*bn*cos(*an*π)}的前*n*项和*Tn.*

**答案**

id:2147497636;FounderCES

1*.*B设等比数列{*an*}的公比为*q*,则*a*1(1*+q*2*+q*4)*=*21,又*a*1*=*3,所以*q*4*+q*2*-*6*=*0,所以*q*2*=*2(*q*2*=-*3舍去),所以*a*3*=*6,*a*5*=*12,*a*7*=*24,所以*a*3*+a*5*+a*7*=*42*.*故选B*.*

2*.*C由题知*q*≠1,所以*S*3*==a*1*q+*10*a*1,解得*q*2*=*9,又*a*5*=a*1*q*4*=*9,则*a*1*=*,故选C*.*

3*.*32设等比数列{*an*}的公比为*q*,由*S*6≠2*S*3得*q*≠1,则*S*3*==*,*S*6*==*,解得*q=*2,*a*1*=*,则*a*8*=a*1*q*7*=×*27*=*32*.*

4*.*6因为*a*1*=*2,*an+*1*=*2*an* ,所以数列{*an*}是首项为2,公比为2的等比数列,因为*Sn=*126,所以*=*126,解得2*n+*1*=*128,所以*n=*6*.*

5*.*63因为*a*1,*a*3是方程*x*2*-*5*x+*4*=*0的两个根,且数列是递增数列,所以*a*1*=*1,*a*3*=*4,所以*q=*2,代入等比数列的求和公式得*S*6*==*63*.*

6*.*(Ⅰ)设数列{*xn*}的公比为*q*,由已知知*q>*0*.*

由题意得

所以3*q*2*-*5*q-*2*=*0*.*

因为*q>*0,所以*q=*2,*x*1*=*1,

因此数列{*xn*}的通项公式为*xn=*2*n-*1*.*

(Ⅱ)过*P*1,*P*2,…,*Pn+*1向*x*轴作垂线,垂足分别为*Q*1,*Q*2,…,*Qn+*1*.*

由(*Ⅰ*)得*xn+*1*-xn=*2*n-*2*n-*1*=*2*n-*1,

记梯形*PnPn+*1*Qn+*1*Qn*的面积为*bn*,

由题意得*bn=×*2*n-*1*=*(2*n+*1)*×*2*n-*2,

所以*Tn=b*1*+b*2*+*…*+bn=*3*×*2*-*1*+*5*×*20*+*7*×*21*+*…*+*(2*n-*1)*×*2*n-*3*+*(2*n+*1)*×*2*n-*2*①*,

则2*Tn=*3*×*20*+*5*×*21*+*7*×*22*+*…*+*(2*n-*1)*×*2*n-*2*+*(2*n+*1)*×*2*n-*1*②*,

*①-②*,得*-Tn=*3*×*2*-*1*+*(2*+*22*+*…*+*2*n-*1)*-*(2*n+*1)*×*2*n-*1*=+-*(2*n+*1)*×*2*n-*1,

所以*Tn=.*

7*.*(Ⅰ)由题意得*a*1*=S*1*=*1*+λa*1,

故*λ*≠1,*a*1*=*,*a*1≠0*.*

由*Sn=*1*+λan*,*Sn+*1*=*1*+λan+*1 得*an+*1*=λan+*1*-λan*,即*an+*1(*λ-*1)*=λan.*由*a*1≠0,*λ*≠0且*λ*≠1得*an*≠0,所以*=.*

所以{*an*}是首项为,公比为的等比数列,

故*an=*()*n-*1*.*

(Ⅱ)由(*Ⅰ*)得*Sn=*1*-*()*n.*由*S*5*=*得1*-*()5*=*,即()5*=*,解得*λ=-*1*.*

8*.*D由等比数列的性质,得*a*3·*a*9*=*≠0,因此*a*3,*a*6,*a*9一定成等比数列,选D*.*

9*.*50由等比数列的性质可知*a*1*a*20*=a*2*a*19*=*…*=a*9*a*12*=a*10*a*11*=*e5,于是*a*1*a*2…*a*20*=*(e5)10*=*e50,ln *a*1*+*ln *a*2*+*…*+*ln *a*20*=*ln(*a*1*a*2…*a*20)*=*ln e50*=*50*.*

10*.*(Ⅰ)设数列{*an*}的公比为*q.*由已知,得*-=*,解得*q=*2或*q=-*1*.*

又由*S*6*=a*1·*=*63,知*q*≠*-*1,

所以*a*1·*=*63,得*a*1*=*1*.*所以*an=*2*n-*1*.*

(Ⅱ)由题意,得*bn=*(log2*an+*log2*an+*1)*=*(log22*n-*1*+*log22*n*)*=n-*,即{*bn*}是首项为,公差为1的等差数列*.*

设数列{(*-*1)*n*}的前*n*项和为*Tn*,则

*T*2*n=*(*-+*)*+*(*-+*)*+*…*+*(*-+*)

*=b*1*+b*2*+b*3*+b*4*+*…*+b*2*n-*1*+b*2*n*

*=*

*=*2*n*2*.*

id:2147497643;FounderCES

**A组基础题**

1*.*C由题意得解得 或又*<*1,所以数列{*an*}为递减数列,故设等比数列{*an*}的公比为*q*,则*q*2*==*,因为数列为正项等比数列,所以*q=*,从而*a*1*=*64,所以*S*4*==*120*.*选C*.*

2*.*D设等比数列{*an*}的公比为*q*,则*a*4*a*7*=*·*a*5*q*2*=*9*q=*45,

所以*q=*5,所以*==q*2*=*25*.*故选D*.*

3*.*B设等比数列{*an*}的公比为*q*,因为*a*3,*a*15是方程*x*2*+*6*x+*2*=*0的根,所以*a*3·*a*15*==*2,*a*3*+a*15*=-*6,所以*a*3*<*0,*a*15*<*0,则*a*9*=-*,所以*==a*9*=-*,故选B*.*

4*.*B由题意知该匹马每日所走的路程成等比数列{*an*},且公比*q=*,*S*7*=*700,由等比数列的求和公式得*Sn==*700,解得*a*1*=*,故选B*.*

5*.*4设公比为*q*(*q>*0),因为*a*2 018*=*,所以*a*2 017*==*,*a*2 019*=a*2 018*q=q*,则有*+=q+=q+*≥2·*=*4,当且仅当*q*2*=*2,即*q=*时取等号,故所求最小值为4*.*

6*.*∵*a*3*a*9*=*,∴*=*2,设等比数列{*an*}的公比为*q*,∴*q*2*=*2,由于*q>*0,解得*q=*,∴*a*1*==.*

7*.*(1)因为*an+*1*=-*2*an+*3,*a*1*=-*1,

所以*an+*1*-*1*=-*2(*an-*1),*a*1*-*1*=-*2,

所以数列{*an-*1}是首项为*-*2,公比为*-*2的等比数列*.*

故*an-*1*=*(*-*2)*n*,即*an=*(*-*2)*n+*1*.*

(2)*bn=an*·sgn(*an*)*=*

设数列{*bn*}的前*n*项和为*Sn*,则*S*100*=*(2*-*1)*+*(22*+*1)*+*(23*-*1)*+*…*+*(299*-*1)*+*(2100*+*1)*=*2*+*22*+*23*+*…*+*2100*=*2101*-*2*.*

**B组提升题**

8*.*D设等比数列{*an*}的公比为*q*,∵*S*3*=*7,*S*6*=*63,∴*q*≠1,∴解得∴*an=*2*n-*1,∴*nan=n*·2*n-*1,设数列{*nan*}的前*n*项和为*Tn*,∴*Tn=*1*+*2·2*+*3·22*+*4·23*+*…*+*(*n-*1)·2*n-*2*+n*·2*n-*1,

2*Tn=*2*+*2·22*+*3·23*+*4·24*+*…*+*(*n-*1)·2*n-*1*+n*·2*n*,

两式相减得*-Tn=*1*+*2*+*22*+*23*+*…*+*2*n-*1*-n*·2*n=*2*n-*1*-n*·2*n=*(1*-n*)2*n-*1,∴*Tn=*1*+*(*n-*1)*×*2*n*,故选D.

9*.*A设等比数列{*an*}的公比为*q*,∵*a*1*=-*6,*a*4*=-*,∴*-=-*6*q*3,解得*q=*,∴*an=-*6*×*()*n-*1*.*

∴*Tn=*(*-*6)*n×*()0*+*1*+*2*+*…*+*(*n-*1)*=*(*-*6)*n×*(,当*n*为奇数时,*Tn<*0,当*n*为偶数时,*Tn>*0,故当*n*为偶数时,*Tn*才有可能取得最大值*.*∵*T*2*k=*36*k×*()*k*(2*k-*1),∴*==*36*×*()4*k+*1,当*k=*1时,*=>*1;当*k*≥2时,*<*1*.*

∴*T*2*<T*4,*T*4*>T*6*>T*8*>*…,则当*Tn*最大时,*n*的值为4*.*

10*.*C解法一由4*nSn-*(6*n-*3)*an=*3*n*,可得4*Sn==*3*+*(6*-*)*an　①*,

当*n=*1时,4*S*1*-*(6*-*3)*a*1*=*3,解得*a*1*=*3,当*n*≥2时,4*Sn-*1*=*3*+*(6*-*)*an-*1*②*,

由*①-②*得,4*an=*(6*-*)*an-*(6*-*)*an-*1,整理得*an=an-*1,即*=*3*×*,故数列{}是等比数列,且公比为3,选C*.*

解法二当*n=*1时,4*S*1*-*(6*-*3)*a*1*=*3,解得*a*1*=*3,当*n=*2时,8(*a*1*+a*2)*-*(6*×*2*-*3)*a*2*=*3*×*2,解得*a*2*=*18,当*n=*3时,12(*a*1*+a*2*+a*3)*-*(6*×*3*-*3)*a*3*=*3*×*3,解得*a*3*=*81,B错误;又*==*6,*==*,故A错误; *=*3,*==*9,*==*27,故D错误,选C*.*

11*.*D因为*a*6*+a*8*=*d*x=×*π*×*42*=*4π,所以*a*8(*a*4*+*2*a*6*+a*8)*=a*8*a*4*+*2*a*6*a*8*+=+*2*a*6*a*8*+==*16π2,故选D*.*

12*.*D因为点(*n*,*Sn+*3)(*n*∈N*\**)在函数*y=*3*×*2*x*的图象上,所以*Sn=*3·2*n-*3,所以*Sn-*1*=*3·2*n-*1*-*3,两式相减得*an=*3·2*n-*1,所以*bn+bn+*1*=*3·2*n-*1,因为数列{*bn*}为等比数列,设公比为*q*,则*b*1*+b*1*q=*3,*b*2*+b*2*q=*6,解得*b*1*=*1,*q=*2,所以*bn=*2*n-*1,*Tn=*2*n-*1,所以*Tn<bn+*1,故选D*.*

13*.*(1)∵数列{*an*}是等差数列,*a*2*=*6,

∴*S*3*+b*1*=*3*a*2*+b*1*=*18*+b*1*=*19,

∴*b*1*=*1,

∵*b*2*=*2,数列{*bn*}是等比数列,

∴*bn=*2*n-*1*.*

∴*b*3*=*4,

∵*a*1*b*3*=*12,∴*a*1*=*3,

∵*a*2*=*6,数列{*an*}是等差数列,

∴*an=*3*n.*

(2)设*Cn=bn*cos(*an*π),由(1)得*Cn=bn*cos(*an*π)*=*(*-*1)*n*2*n-*1,

则*Cn+*1*=*(*-*1)*n+*12*n*,

∴*=-*2,

又*C*1*=-*1,

∴数列{*bn*cos(*an*π)}是以*-*1为首项、*-*2为公比的等比数列*.*

∴*Tn==*[(*-*2)*n-*1]*.*